ROBOTICA INDUSTRIALE A

Titolo nota 01/11/2009

$^A_B R = [\,{}^A\hat{X}_B \mid {}^A\hat{Y}_B \mid {}^A\hat{Z}_B\,] \Rightarrow$ Matrice di rotazione che descrive l'orientamento della terna $\{B\}$ rispetto alla terna $\{A\}$

Essendo composta da versori e dato che $\hat{x}_B \cdot \hat{x}_A = \|\hat{x}_B\| \cdot \|\hat{x}_A\| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$, essendo 1 il modulo di un versore, la matrice è composta da coseni.

PROPRIETÀ

* $^B_A R = {}^A_B R^T$

* $^A_B R^{-1} = {}^A_B R^T$

USI

* CAMBIO DI COORDINATE → descrivere uno stesso vettore rispetto a due terne diverse con origine in comune.

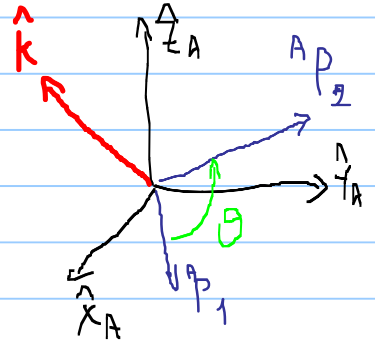
$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P$$

VETTORE P DESCRITTO RISPETTO AD {A}

MATRICE DI ROTAZIONE DA B AD A

VETTORE P DESCRITTO RISPETTO A {B}

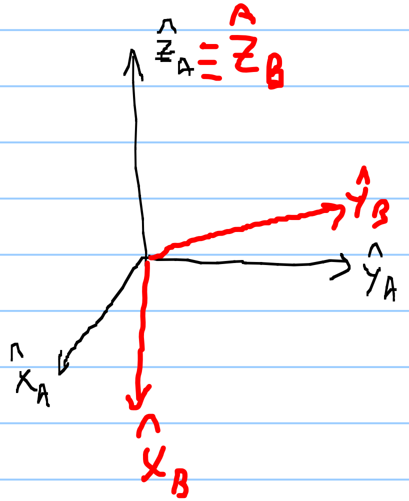
* ROTAZIONE DI VETTORI → voglio ruotare un vettore di un angolo θ attorno a un generico asse $\hat{K}$.



$${}^{A}P_2 = R_K(\theta) \cdot {}^{A}P_1$$

OPERATORE DI ROTAZIONE

DESCRIZIONE DI UNA TERNA RISPETTO A UN'ALTRA



$$ {}^{A}_{B}R = R_z(\theta) $$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

COMPOSIZIONE DI MATRICI DI ROTAZIONE

$$ {}^{A}_{D}R = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}_{C}R \cdot {}^{C}_{D}R $$

TERNE NELLO SPAZIO

Date due terne $\{A\}$ e $\{B\}$ e detti:

$^{A}_{B}R$ = matrice di rotazione

$^{A}P_{B}$ = vettore che unisce le due origini

definisco la MATRICE DI TRASFORMAZIONE OMOGENEA che descrive la terna B rispetto alla terna A come segue:

$$^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & ^{A}_{B}R & & ^{A}_{B}P \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

USI

* TRASLAZIONE DI UNA TERNA: $^{B}_{A}T = T_K(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k_x d \\ 0 & 1 & 0 & k_y d \\ 0 & 0 & 1 & k_z d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

NON HO ROTAZIONE

DIREZIONE DI TRASLAZIONE

AMPIEZZA DELLA TRASLAZIONE

* ROTAZIONE DI UNA TERNA: $^{B}_{A}T = T_K(\theta) = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}R(\theta) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$

NON HO TRASLAZIONE

ASSE DI ROTAZIONE

ANGOLO DI ROTAZIONE

* CAMBIO DI COORDINATE: ridefinisco $^{A}\bar{p} = \begin{bmatrix} ^{A}p \\ 1 \end{bmatrix}$ = vettore di posizione di P rispetto ad $\{A\}$

$$^{A}\bar{p} = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}\bar{p}$$

* TRASLAZIONE DI UN PUNTO: $^A\bar{P}_2 = T_k(d) \cdot {}^A\bar{P}_1$ sola componente di traslazione

VERSORE

* ROTAZIONE DI VETTORI: $^A\bar{P}_2 = T_k(\theta) \cdot {}^A\bar{P}_1$ sola componente di rotazione

COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI: ${}^A_C T = {}^A_B T \cdot {}^B_C T$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE INVERSA

$$ {}^B_A T = {}^A_B T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B R^T & & -{}^A_B R^T \cdot {}^A P_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

STRUTTURA 1° COMPITINO

Dato un manipolatore:

1) Fissare le terne e ricavare la tabella delle variabili di giunto

2) Ricavare la matrice di trasformazione omogenea $T = \left[\begin{array}{c|c} R & P \\ \hline 0\,0\,0 & 1 \end{array}\right]$

3) Data una rotazione minima, ricavare la matrice di rotazione

4) Confrontare la matrice di rotazione del punto 3 con quella contenuta nella matrice di trasformazione e ricavi α, β, γ

5) Risolvo la cinematica diretta ricavando $X = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

ROBOTICA - I COMPITINO

Titolo nota 02/11/2009

① FISSARE LE TERNE

* Fisso gli assi
* Si parte dalla terna 1
* Terna i : considero gli assi i e $i+1$
* Fisso la $\hat{z}_i$ lungo l'asse i con verso a piacere
* Fisso la $\hat{x}_i$ lungo la distanza tra i due assi e comunque perpendicolare a entrambi
* Fisso la $\hat{y}_i$ con la regola della mano destra : pollice la $\hat{x}$, indice la $\hat{y}$ e medio la $\hat{z}$.
* Se ho un giunto rotoidale devo esplicitare la variabile di giunto θ_i e usare i gradi di libertà per cercare di annullare le altre

* Se ho un giunto **prismatico** devo esplicitare la variabile di giunto **d_i** e usare i gradi di libertà per cercare di annullare le altre

VARIABILI DI GIUNTO

α_{i-1} → angolo tra $\hat{Z}_{i-1}$ e $\hat{Z}_i$ misurato lungo $\hat{X}_{i-1}$.

a_{i-1} → distanza tra $\hat{Z}_{i-1}$ e $\hat{Z}_i$ misurata lungo $\hat{X}_{i-1}$.

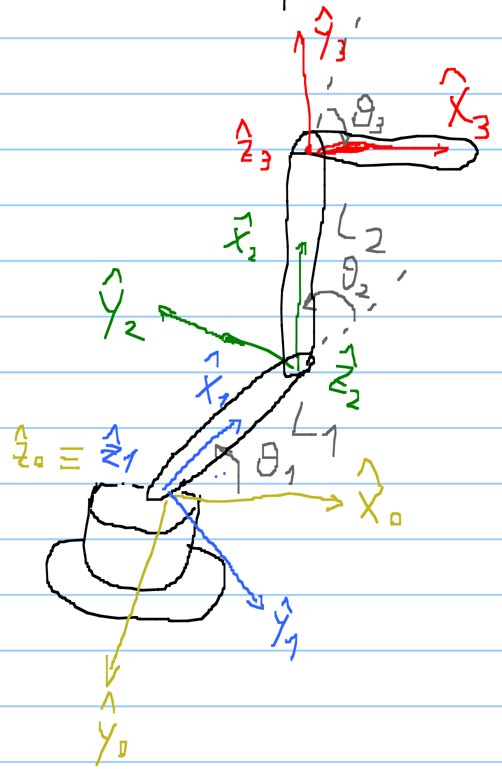
θ_i → angolo tra $\hat{X}_{i-1}$ e $\hat{X}_i$ misurato lungo $\hat{Z}_i$.

d_i → distanza tra $\hat{X}_{i-1}$ e $\hat{X}_i$ misurata lungo $\hat{Z}_i$

Per gli angoli, il segno si determina con la regola della mano destra; pollice lungo il versore, dita che si chiudono nel verso positivo

Per le distanze il segno è dato dal verso del versore.

Scrivere infine la tabella dei parametri cinematici



	α_{i-1}	a_{i-1}	ϑ_i	d_i
1	0	0	ϑ_1	0
2	0	$+L_1$	ϑ_2	0
3	0	$+L_2$	ϑ_3	0

N.B. le variabili di giunto non vogliono segni.

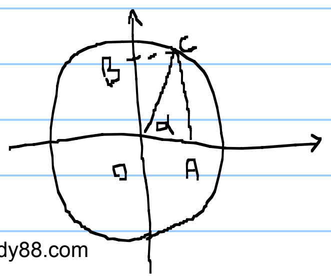
② MATRICE DI TRASFORMAZIONE OMOGENEA

$$
{}^{i-1}_{\;\;i}T = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i \, C\alpha_{i-1} & C\theta_i \cdot C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} \cdot d_i \\ S\theta_i \, S\alpha_{i-1} & S\alpha_{i-1} \, C\theta_i & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} \, d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Inserendo la 1° riga della tabella di sopra ottengo ${}^0_1T$, e così via

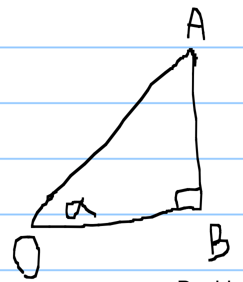
${}^0_3T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T$ ← matrice di trasformazione omogenea.

RICORDA



$OB = \sin\alpha$

$OA = \cos\alpha$



$AB = OA \cdot \sin\alpha$

$OB = OA \cdot \cos\alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

3 NOTAZIONE MINIMA

Viene assegnata una notazione minima (tipicamente assi fissi o assi mobili) e viene richiesto di calcolare ${}^{0}_{n}T(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$.

$$R_{xyz}(\gamma, \beta, \alpha) \begin{cases} R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) & \text{ASSI FISSI} \rightarrow \text{ordine inverso} \\ R_x(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\alpha) & \text{ASSI MOBILI} \end{cases}$$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \qquad R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha \end{bmatrix} \qquad R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ {}^{0}_{n}T(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) = \left[\begin{array}{ccc|c} & R_{xyz}(\gamma,\beta,\alpha) & & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

④ CINEMATICA DIRETTA

Confrontando ${}^{0}_{n}T(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ con la matrice di trasformazione omogenea del punto 2 ricavo $x,y,z,\alpha,\beta,\gamma$.

ATTENZIONE alle soluzioni doppie (ad es. $c_\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \pm \frac{\pi}{2}$)

$$ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} $$